

連立方程式と一次関数を同時に学習するカリキュラム開発 — 身のまわりのできごとを式やグラフで考察する —

福井大学教育地域科学部附属中学校 草 桶 勇 人

従来、単元「連立方程式」と「一次関数」は別々に扱っている内容である。しかし、本実践では2つの単元を融合させ、現実事象を考えながら代数分野と関数分野を同時に学習するカリキュラムを設定した。現実事象として、「携帯電話の料金プラン」「修学旅行の移動のようす」という場面を設定し、子どもの考えや発想をもとにした授業の流れを組み入れた。

第一次では、携帯電話の料金プランを考える中で、料金プランの背景に存在する数学的意味、つまり式・グラフ・表が相互に関係すること、2つのプランで同じ料金になるところに注目しながら2直線の交点と連立方程式の解が同じとなることを確認した。第二次では、修学旅行の移動のようすを考える中で、自分の動きをグラフに表したり、グラフから分かることを挙げたりした。そして、動いている2つが出会うような問題づくりを行い、作成した問題の仲間分けをして、効率よく問題を解き合う中で、速さとグラフの傾き、座標、変域、グラフの平行移動、切片、座標などの考えを学習し、一次の概念を形成した。

単元終了後に、式とグラフの有用性に関するアンケートをとったところ、実践前よりも実践後のほうが、式の有用性を感じる生徒が増加したが、グラフに関しては減少する結果となった。

キーワード：連立方程式、一次関数、カリキュラム、式、グラフ

1. はじめに

従来の学習では、単元「一元一次方程式」→「比例、反比例」(1年)、単元「連立二元一次方程式」→「一次関数」(2年)、単元「二次方程式」→「関数 $y=ax^2$ 」(3年)といったように、各学年とも代数分野の学習を終えてから関数分野の学習に入る。しかし、現実事象を考えた場合、2つの数量の間の関係を調べる過程で方程式を用いる必要性が生じると考えたほうが妥当である。そうすることで、子どもたちは代数分野の学習は日常生活の中で必要な学びであると認識すると考える。

そこで、本校では、第2学年の内容においてカリキュラム再編を行い、単元「連立方程式」「一次関数」を同時に学習するカリキュラムを設定し、「身の回りのできごとを式やグラフで考察する」という大きな枠を設けた。この枠組みの中で、「携帯電話の料金システム」「修学旅行の移動のようす」という2つの場面を設け、設定された場面から子どもの筋で課題や疑問を解決する過程を重視した。そして、これら2つのステージにおける学びが、課題解決の過程で必要に応じて獲得される知識として、特に本稿では式の有用性が実感できることを期待し、本実践を行った。

2. 先行研究

「連立方程式」と「一次関数」を同時に学習するカリキュラム開発に関する先行研究については、単元全体を「遠足」でつなぐ(主題名:「列車の動きを捉えよう」)実践

研究が挙げられる。

牧田(1997)は、関数式は独立変数の変化に従属変数がどう変化するかを目をつけたものであり、方程式は式を満たす解(x, y)の組に目を付けたものであるにすぎない。グラフを見るにしても、動的に変化を見るか、静的に点集合と見るかの違いである。どちらか一方だけで、と言う類のものではない。日常の事象が、これは一次関数として事象、これは連立方程式としての事象、というように区別されて迫ってくるものではない。重要なのは、どのように解明していくかを模索することであろう。従って、「これは一次関数を用いて解く問題」、「これは連立方程式を使って解く問題」と区別して生徒に与えていくのでは肝心の「自ら事象を解明していく能力」を高めることにはならないと述べている。

実際に牧田(1997)は、題材全体を1つの大きなストーリーでつなぎ、自分が主人公となって事象を解明していくような題材設定を考えた。それが単元全体を「遠足」でつなぐというものであった。第一次では、離散方の一次の関係式を作り、思考の流れを表出する場として、大人と子どもの人数と料金についての設定であった。事象を「思考を進めるカード」を用いて解明していく体験の場を設定した。第2次では、連続型の関係式から、一次関数の諸概念を捉える「はくたか5号の動きを調べよう」という主題を設定し、ダイヤグラムに関する事象解明をメインとした。

そこで、本実践では、第一次として「携帯電話の料金

システム」，第二次として「修学旅行の移動のようす」という場を設定し，2つの場面から一次の概念を形成していく実践研究を行うことにした。

3. 研究方法

まず，押さえるべき事項のものがないように，教科書「未来をひらく」(啓林館)での単元「連立方程式」「一次関数」における基礎的事項を整理した。実際に実践する中で，子どもから表出された考えと教科書の基礎的事項がマッチしたところは，教師自身が確認するとともに，なるべく授業の中で子どもとともに確認することを心がける。

第2学年の単元である「連立方程式」「一次関数」を同時に学習する本校のカリキュラム「身の回りのできごとを式やグラフで考察する」において，本実践では「携帯電話の料金システム」「修学旅行の移動のようす」という2つの場面設定を行い，その状況から生まれる子どもの達の課題や疑問を解決する過程を重視し授業を展開する。

さらに，実践前と実践後での式とグラフに関する利便性の変容を調査するため，4段階の得点記入によるアンケートを実施し，それをもとに本実践の考察を行う。

なお，実際の授業については，以下のような指導計画のもとに行った。

指導計画

第一次 携帯電話の料金プランを考える (10時間)

- ・3つのプランの提示
- ・料金プランの背景に存在する数学的意味の確認

第二次 修学旅行の移動の様子を考える (11時間)

- ・自分の動きをグラフに表す
- ・修学旅行の移動のようすを表したグラフからわかることを挙げる
- ・動いている2つが会うような問題づくり
- ・作成した問題の仲間分け
- ・問題の解き合い
- ・アンケート

4. 実践記録・結果

(1) 携帯電話の料金システムを考える中で，グラフ・式の有用性を実感する。 (第1～7時)

まず以下の課題を設定した。

課題1

<Aプラン>

- ・基本使用料 (月額) 4200円
- ・1分ごとの通話料 30円

<Bプラン>

- ・基本使用料 (月額) 4500円
- ・無料通話 2000円
- ・1分ごとの通話料 50円

<Cプラン>

- ・基本使用料 (月額) 7500円

3つの料金プランA～Cの中で，お得な料金プランはどのプランか，班で考えよう。

8つの班の中から代表的な考えは以下の通りであった。

<7班の考え>

各プランが向いている人を表す。10分話す人はAプラン，Bプランは0～100分で月額が高いけれど40分以上の人は安い。101分以上話す人はCプラン (図1)。

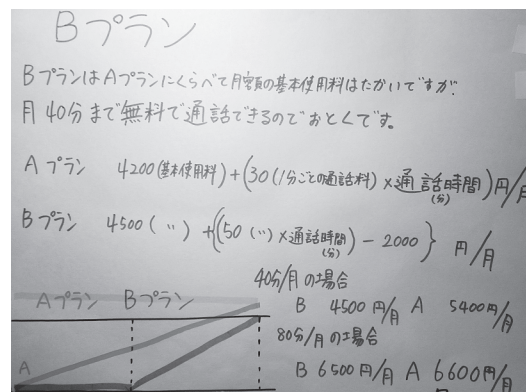


図1 7班が考えたプラン

7班は，他にも料金システムをもとにして，かかる料金を言葉の式で表していた。

<5班の考え>

グラフは横が時間，縦がかかる料金。料金は上にいくと上がっていく。110分からはCが得で，Bとは差が開いていく (図2)。

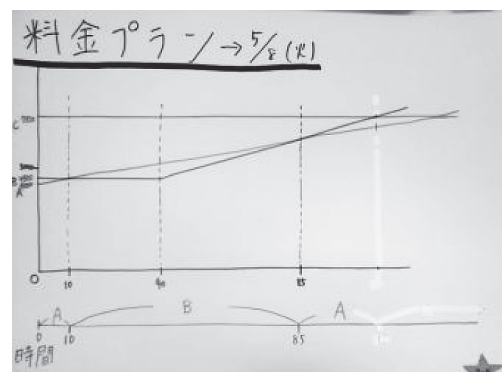


図2 5班が考えたプラン

5班はグラフを用いた説明であった。

<1班の考え>

時間ごとのおすすめプラン。0～10分と85～110分はAプラン，10～85分はBプラン，110分～はCプラン (図3)。

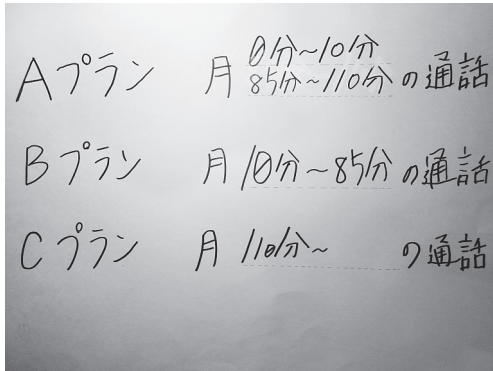


図3 1班が考えたプラン

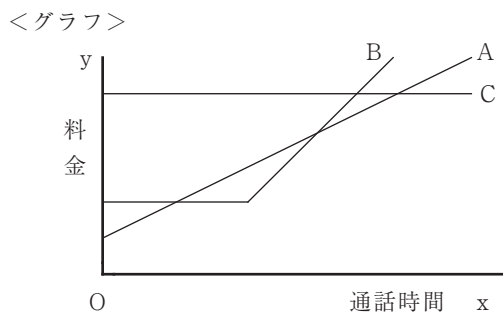
この考えに対し、生徒から「なぜ具体的な数字がわかるのですか?」という質問があり、「10分ごとにそれぞれの料金を求めた。それが無理なら5分ずつ。数字を代入したってことです。」と答えていた。

以上3つの班の考えを紹介したが、7班は式を、5班はグラフを、1班は表の考えを利用して、お得な料金プランを考えていた。関数の3つの役割である式・グラフ・表が、生徒の発想のもと導き出されていた。

(2) 料金プランの背景に存在する数学的意味を確認する。(第8～10時)

まず、料金プランの式とグラフを求めることにした。グラフに関しては、料金プランをもとに重なる部分を調べて、どこが多いかを考えながら作成した。式に関しては、料金システムをもとに、言葉の式を考えながら求めた。

以下は、今回の料金プランをもとに求められたグラフと式である(図4)。



<式>

$$\begin{aligned} A: y &= 4200 + 30x \quad (x \geq 0) \\ B: y &= 4500 \quad (0 \leq x \leq 40) \\ y &= 4500 + 50(x - 40) \quad (x \geq 40) \\ \text{または} \\ y &= 4500 + 50x - 2000 \quad (x \geq 40) \\ C: y &= 7500 \quad (x \geq 0) \end{aligned}$$

図4 各料金プランのグラフ(上)と式(下)

さらに、一次関数の定義、一次関数と比例の関係、平行移動、連立方程式の定義、連立方程式の解の意味、2直線の交点の座標、代入法などを確認した。また、料金

プランのグラフから式を求める考えをもとに、①傾きと切片、②傾きと1点の座標、③2点の座標から式を求める方法を確認した。

これらの考えの習得の場として、連立方程式の解き方、グラフから式を求めること、2直線の交点の座標を求めることを行い、携帯電話の料金プランの単元を終えた。

(3) 修学旅行の移動のようすを数学で考える。

(第11～19時)

① 自分の動きをグラフに表す。

(第11時)

まず、物体との距離をセンサーで感知しそれをグラフ化するプログラムが内蔵されたグラフ電卓を用いて、自分の動きをグラフに表すことを行う。グラフ電卓は1年生の時にも使用したもののだが、復習の意味を込めてもう一度改めて考えることにした。

課題2. 次のグラフを表すには、どのような動きをすればよいだろう。(図6 グラフ①～⑤)

実際に、グラフ電卓の前でいろいろな動きを行いスクリーンに映し出した(図5)。1年生の時に学んでいることもあり、生徒たちは、センサーに近づく動き、センサーから遠ざかる動き、センサーの前で止まっている動き、あるいはそれらを組み合わせた動きなど、すべて理解していた(図6)。

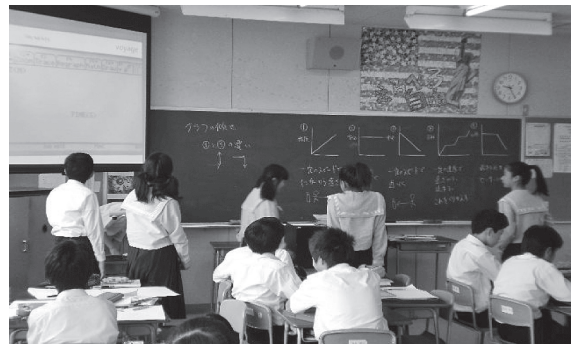


図5 実際の授業のようす

そこで、これらの動きを言葉で表すとどうなるかを考えることにした。

課題3. グラフの動きを言葉にするとどうなるだろう。

グラフ①: 一定のスピードで歩き、センサーから遠ざかっている。

グラフ②: ずっと止まっている。止まっているから速さは0。

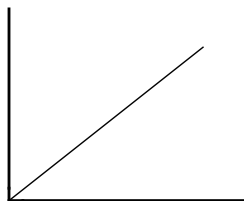
グラフ③: 一定のスピードで近づいている。

グラフ④: センサーから一定の速度で遠ざかって、止まてを繰り返す。

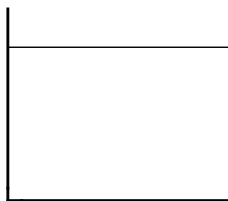
グラフ⑤: 最初に止まって、はじっこから近づく。

一つ一つの動きを丁寧に言葉で確認しながら5つの動きをおさえた。動きを言葉にすることに戸惑いを見せる子どももいた。

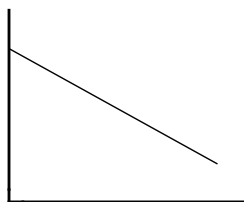
グラフ①



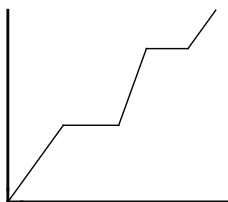
グラフ②



グラフ③



グラフ④



グラフ⑤

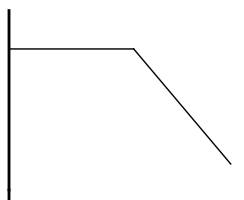


図6 グラフ電卓で映し出されたグラフ

② 動きのグラフからわかることを挙げる。

(第12～13時)

次に修学旅行という場を設定し、状況1, 2とそれぞれのグラフを提示した。

課題4. 東京へ修学旅行に行くことになりました。以下の地図と、状況1と状況2をもとに、グラフからわかること挙げよう。

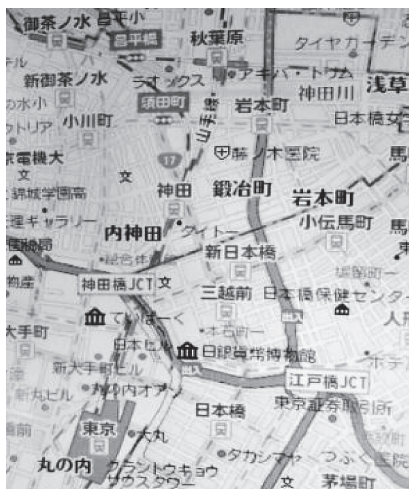


図7 提示した地図

状況1

修学旅行の班別行動として、ホテルから秋葉原駅まで向かいます。

ホテルを9時に出発し、ホテルから東京駅まで歩いて行き、東京駅の地下街のお店で買い物をしました。そして、東京駅を出て、道の途中の屋台でもんじゃ焼きを試食してから、秋葉原駅へ向かいました。

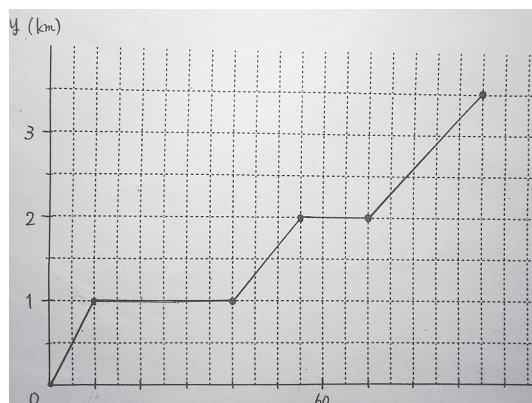


図8 状況1のグラフ

状況2

AKB48が秋葉原でイベントをしています。イベントが終わったら、秋葉原からパレードで東京駅まで歩いて来ました。

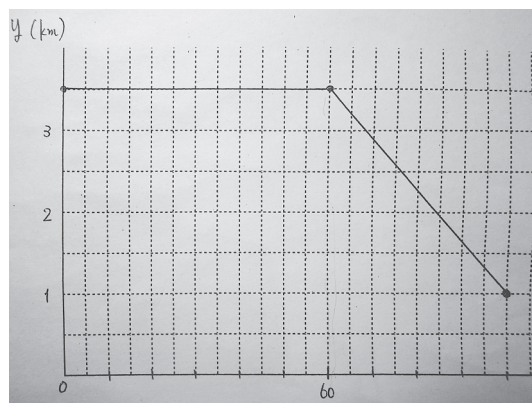


図9 状況2のグラフ

状況1、状況2それぞれについて、グラフからわかることを挙げた。速さ、距離、滞在時間、出会った時間、割合、x軸y軸の意味などが挙げられた。それらを付箋にしてグラフ用紙にまとめた。

<グラフからわかること>

(1) 状況1

- ・東京駅から屋台まで1km
- ・屋台から秋葉原まで1.5km
- ・もんじゃ焼きの試食の時間は15分間
- ・ホテルから秋葉原駅まで3.5km

- ・ホテルから東京駅まで1km
- ・ホテルから東京駅までの進む速さは $\frac{1}{10}$ km/分
- ・全部で95分間
- ・東京駅から屋台まで $\frac{1}{15}$ km/分
- ・東京駅での買い物は30分
- ・屋台から秋葉原駅まで $\frac{3}{50}$ km/分
- ・はじめは1kmを10分それ以降は1kmを15分
- ・屋台から秋葉原駅までは分速60km
- ・試食と買い物の時間は約47%
- ・歩いた時間の割合は約53%

(2) 状況2

- ・x軸は時間
- ・y軸は進んだ距離
- ・y軸は目的地までの距離（東京駅）
- ・40分で東京駅に着く

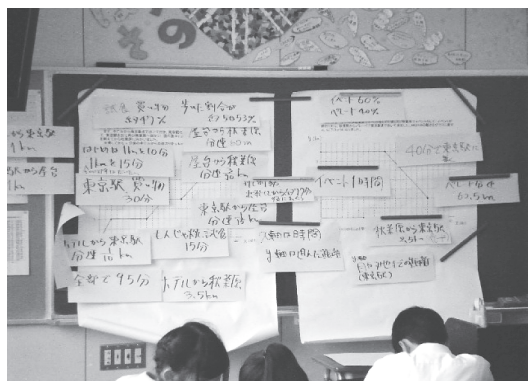


図10 グラフから分かることを挙げる

- ③ 芸能人と班別行動をしているみなさんが出会うような問題をつくる。（第14～15時）
そして、グラフから分かることを参考にしながら、問題作りを行った。

課題5. 前の時間と同じ状況で、みなさんとAKB48が出会うような問題をつくろう。出発時間は自由で、11時までに集合すればよいものとします。買い物は20～40分、試食は10～20分とします。出会うような問題であれば何を求めてもかまいません。班で考えます。

ある班を例に、生徒たちの問題を作成する過程の様子を以下に紹介しておく。

——Dは始めに、班別行動をしている動きを、グラフ電卓でのグラフ④（図6）のように表していた。すると、Rは「そのグラフ簡単じゃない？」と質問がある。Rは買い物をしている時に、いったん進んで戻る動きを取り入れ、その動きをDに説明する。するとDは感心するようになる。Rから教師に対し、「出会うところは、AKB

がイベントをしているときでもいいですか？」という質問があり、「どこでもいいけど、お互いが動いて出会うところの方がいい」と答える。Rは2本のグラフを合わせてみて、試食中になってしまうから出会わないと判断し、うまく出会うように買い物の時間を短くしている。Dも同じように2本のグラフを合わせている。RはAKBのパレードの動きを式に表そうとして、切片とは何か疑問を持つようになる。Rが最初に作った式は、次の通りであった。

$$\text{AKB: } y = -\frac{3}{50}x + 3.5$$

$$\text{班別行動: } y = \frac{3}{5}x + \bigcirc$$

（切片はまだ不明）

ワークを参考にしながら、切片はy軸との交点ということに気づく。Rは、班別行動をしている動きの式を出すために、傾きと1点の座標（100, 3.5）の値を代入した。そして、以下のように正しい式を求めることができた。携帯電話の料金プランを考える際の式の求め方が生きている。

$$\text{班別行動: } y = \frac{3}{50}x - 2.5$$

Rは「xの値だから時間を求めている。どこで出会えたかにしたいから、yを求めないといけない。求めたxの値を式に代入しないといけない」と述べ、交点の座標の意味にも気づいている。そして、以下の問題を作成した。

AKB48とみんなが出会ったところは、ホテルから何kmの地点か。

上記の問題は一つの例であり、他にも様々な問題が作られた。代表的な問題を以下に示していく。

- ④ 作成した問題を仲間分けし、仲間分けされた問題を効率よく解く。（第16～21時）

課題6. みなさんが考えた問題から、先生が10問を選んだので、これらがどのような問題かを考えて、問題の仲間分けをしてみよう。

作成した問題（問題に付いているグラフは省略）

- ①東京駅まで10分かけていって20分地下街を歩き2km先のもんじゃを食べました。もんじゃを15分かけてたべおったら9:55でした。それから地下街に忘れものをしたので10分でもどって15分で1.25kmのはやさでアキバまでいきました。いつ、どこで、AKBにあうか。
- ②AKB48とみんなが出会ったところはホテルから何kmの地点か。

③10時15分に秋葉原にAKBが出現することが分かりました。今の時間は9時で買い物には20分、途中で食べるもんじゃ焼きは20分ですむようにします。さて、この時に秋葉原にまにあうためには移動の速さは、分速何mでいけばよいでしょうか。なお、ホテルから秋葉原まで3.5kmあるものとします。

④9:15にホテルを出発して、5分で東京駅に歩いて行った。30分かけて東京駅の地下街のお店で買い物をした。15分歩くと道の途中で屋台を発見しました。もんじゃ焼きを試食するのに13分かかった。22分歩いて秋葉原に着いた。

問1 移動しているときの平均の速度は？

問2 ホテルから渡橋駅へ行くときの速度は？

問3 東京駅から屋台へ行くときの速度は？

問4 AKB48と出会った時間は？

⑤まずホテルから東京駅まで歩いて行き、東京駅の地下街のお店で買い物をしました。そして、東京駅を出て再び秋葉原へ向かい、道の途中にある屋台でもんじゃ焼きを試食し、試食を終えてから秋葉原に向かったところ道をまちがえて通りすぎたのでおり返しました。AKB48と会おうのは出発してから何分後ですか。また、ホテルから何kmの地点ですか。

⑥(1) 9:00にホテルを出て、9:10に駅につきました。

9:10～9:50まで買い物をして、

9:50～10:05までもんじゃ焼きにいき、

10:05～10:25までもんじゃ焼きをたべて、

10:25～10:55で秋葉原につきました。

何をしている時にAKBとあったでしょう？

(2)出発時間を35分おくらせました。何をしている時にAKBとあったでしょう？(1)で買い物時間を10分へらしました。

⑦(1)11時までに秋葉原につくにはバレードがおわってから分速何kmで歩かないとだめか？

(2)AKBと一緒に歩く時間は何分間でしょう。

⑧AKBと出会ってから、AKBと一緒に東京駅まで行き、秋葉原に行きました。AKBと会った時間はどのくらいでしょうか。

⑨修学旅行で東京駅に行くことになり、班別行動して、宿泊しているホテルから秋葉原まで向かうことになりました。

まず、ホテルから東京駅15分歩いて行きましたが、東京駅についたところで、忘れ物に気づき、5分で走って取りに帰りました。しかし途中で疲れてしまい、ホテルから東京駅に行くのに、15分かかってしまいま

した。そこから、30分の買い物をして10分で屋台に着きました。そこで、15分の試食をして、11時ちょうどに秋葉原につきました。

Q1 秋葉原へ歩いていった割合は全体の何%ですか。(時間) また、分速何mですか。

Q2 AKBと会う時間と点Pの座標を答えなさい。

Q3 忘れ物をしなかった時のAKBと会う時間は何時ですか。

⑩ホテルからお店に向かい、20分間買い物をし、秋葉原へ向かったところ、道をまちがえ、ひきかえした。そして、道の途中にあるもんじゃ焼きを食べてから、AKBに東京駅までついていった。しかし、時間がなくなってしまった。時速何kmでいくと、11時までに間に合うか。

以下に、ある班における問題の仲間分けの活動の様子を紹介する。

——2班では、D、Sの男子2名と、R、A、Mの女子3名が全く別々に話し合いを進める。

女子3名の方は、「何を求めるか」で分けていく。そして「いろいろ」含まれるものについては図で解決することになった。しかし、「どこに」「何をしているときに」「いつ」というような表現の問題をどう扱うか、文章表現に忠実なために迷いが生じていた。

男子2名の方は、それぞれ問題を解いていった。問題の意味を理解するにはまず問題を解くことが大事だと思っているようすであった。DはSという対話の相手がいることで、仲間分けの思考を明確にすることが可能となり、Sは問題やグラフの意味を理解することが可能になっていた。

その後、全ての班の仲間分けの視点をまとめ、教師が2点付け足し、全部で以下の9つの視点があることを確認した。

仲間分けの視点

- ① 求めるもの(速さ、距離、時間、割合、座標)
- ② グラフの形(戻る、戻らない)
- ③ つく時間(xのとり値、x座標)
- ④ AKBと一緒に歩く
- ⑤ グラフをずらして解く
- ⑥ 求める方法(図、算数的)
- ⑦ 何をしているか問題
- ⑧ 範囲を求める、可能・不可能
- ⑨ 原点からスタートしていない

そして、各班が考えた仲間分けの視点を参考にして、問題を解いていった。問題を解く過程で、仲間分けの視点の転換や問題の表現の改善を行った。さらに、グラフから読み取れるものはグラフから簡単に答えを求めた。

式を用いて正確に答えを出す問題は、複雑な計算も行いながらそれぞれの問題を解いていった。DやRは、式を自由に駆使して問題を解いていた。

5. 考察

(1) 式・グラフの有用性

本単元では、式やグラフの有用性を実感させることを一つのねらいとして学習を進めた。

生徒のアンケートを調査すると、本単元の学習前と学習後の式とグラフの利便性に関するアンケート結果は以下の通りであった。

式（方程式）の利便性

得点	4	3	2	1
学習前(人)	9	17	9	4
学習後(人)	13	19	5	2

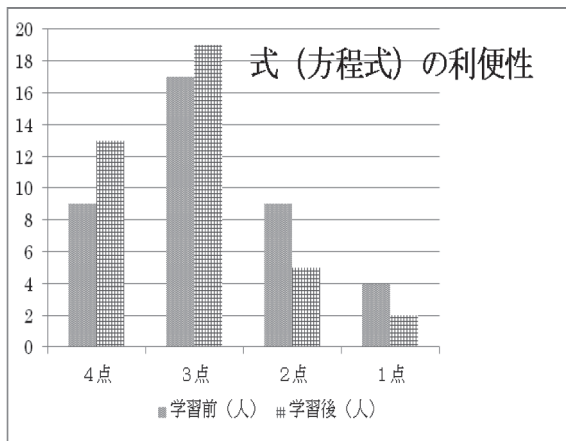


図11 式（方程式）の利便性

グラフの利便性

得点	4	3	2	1
学習前(人)	24	9	4	2
学習後(人)	18	14	5	1

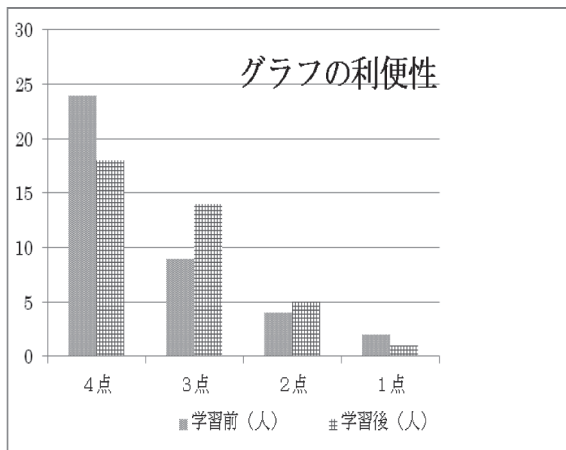


図12 グラフの利便性

このように、式（方程式）に関しては、3点と4点の人数が増加し、2点と1点の人数が減少した。式を便利だと感じる子どもが増えたことが分かる。しかし、グラフに関しては、4点から3点に移行する傾向が現れた。この結果から、式を駆使して問題を解決する子どもが増えた傾向にあると考えられる。作成した問題にもよるが、2直線の交点の座標は、グラフではおおまかな数値は出せても、正確な数値は式を用いないと求めることができない。式を用いる必要性のある問題や状況を設定することが大切だということがわかる。

実際に子どもたちは、作成した問題を解き合う場面で、おおまかな数値や答えを出す際はグラフを用いて、正確な数値を出す際は式を用いていた。グラフから式、式からグラフの考えの移行ができていた。

Dという生徒に注目すると、「携帯電話の料金」については、始めは算数的な見方しかできていなかったが、他の発表を聞いてグラフや方程式を用いることができるようになった。さらに、「修学旅行の移動のようす」では、どの活動においてもまずは式を出すことを心掛けていた。式を一つの道具として使いこなすことが可能になっていた。

(2) 具体から抽象への移行

数学教育の一つの課題は、抽象的な概念の獲得に困難を感じていることだと言われている。特に中学校3年間において、抽象的な概念の獲得の困難は一層目立っているようだ。

そこで具体から抽象的な概念の獲得をめざすために、「修学旅行の移動のようす」において、まずグラフ電卓を用いた。5つの動き（進む、止まる、戻る、進んで止まる、止まって進む）を、グラフを用いて調べることにより、言葉とグラフによる自分の動きを関連付けさせた。これらの活動によって、課題4の状況1と状況2のグラフから分かることがスムーズに挙げられ、計18個挙げられた。

グラフからわかることを挙げ、問題を作成・仲間分けし、それを解き合う過程は、PISAの数学化サイクルを意識した。現実の場面（修学旅行の移動）を数学の世界で考え、数学的アプローチ（立式、連立方程式の解き方）によって数学的な解（連立方程式の解）を現実のものとしてとらえることをめざした。問題を解き合う場面では、どの子どもも式を出して問題を解決していた。数学的に式を用いた解法が意識できていた。PISAの調査によると定式化の過程ができていないという報告があるので、本単元はPISAの求める数学的リテラシーを育む一つのきっかけになったと思われる。

引用・参考文献

牧田秀昭（2005）探究するコミュニティへのプロセス

数学科カリキュラム構成と全体研究運営をデザイン
する, 学校改革実践研究報告No9 2005, pp23-25
青山 庸編著 (2004)多面的にもものを見る力・論理的に

考える力を育てる数学の授業, 東洋館出版社
小寺隆幸・清水美憲編著 (2006)世界をひらく数学
的リテラシー, 明石書店

Development of the curriculum to study simultaneous equations and linear function at the same time
～ Think of the things around us through formula and graph ～

Hayato KUSAOKE

Key words : simultaneous equations, linear function, curriculum, formula, graph